ESCUELA MILITAR DE INGENIERIA
CÁLCULO II
Misceláneas de problemas
2013

Tema: Aplicaciones de las Derivadas Parciales.

---

1. Demuestre que el plano tangente al cono $z = a^2x^2 + b^2y^2$ pasa por el origen.

2. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2+y^2$ en el punto $P(3, 4, 25)$.

3. Hallar las ecuaciones del plano tangente y la recta normal a la superficie $z = \frac{x^2}{2} - y^2$ en el punto $P(2, -1, 1)$.

4. Demostrar que la recta normal al cono $z = 3x^2 + 3y^2$ intercepta al eje z.

5. Demostrar que la ecuación del plano tangente a la superficie $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, en un punto cualquiera es: $\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} - \dfrac{z_0z}{c^2} = 1$.

6. Demostrar que todo plano tangente a la superficie $x^2 + y^2 = z^2$ pasa por el origen.

7. Para la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ hallar las ecuaciones de los planos tangentes a ella que sean paralelos al plano $x + 4y + 6z = 0$.

8. Hallar los valores de m para que el plano $x - 2y - 2z + m = 0$ sea tangente a la superficie $x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 144 = 0$

9. Determinar el punto de la superficie $z = xy + 5$ en el que el plano tangente sea horizontal.

10. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $xyz = a^3$ en un punto cualquiera P_0. Luego, demostrar que el volumen del tetraedro limitado por este plano y los tres planos coordenados es constante e igual a $V = 9a^3/2$.

11. Demostrar que toda recta normal a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ pasa por su centro.

12. Hallar los puntos del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en los que los planos tangentes corten en los ejes coordenados segmento de igual longitud.

13. Hallar los puntos del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en los que la recta normal forme ángulos iguales con los ejes coordenados.

Probar que cada par de superficies propuestos son tangentes en el punto dado:

14. $x^2 + y^2 + z^2 = 18; \quad xy = 9; \quad (3, 3, 0)$

15. $x^2 + y^2 + z^2 = 3; \quad xyz = 1; \quad (1, 1, 1)$

16. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 6z + 24 = 0; \quad x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9; \quad (2, 1, 1)$

Demostrar que cada par de superficies son mutuamente perpendiculares en el punto dado:

17. $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 8; \quad 4x^2 - y^2 + 2z^2 = 14; \quad (2, 2, 1)$

18. $x^2 - y^2 + z^2 = -2; \quad x^2 + y^2 + 3z^2 = 8; \quad (-1, 2, 1)$

19. $x^2 + y^2 + z^2 = 50; \quad x^2 + y^2 - 10z + 25 = 0; \quad (3, 4, 5)$

20. Probar que cada una de las superficies es perpendicular a las otras dos en el punto $(1, 2, 1)$:

$$14x^2 + 11y^2 + 8z^2 = 66; \quad 3z^2 - 5x + y = 0; \quad xy + yz - 4xz = 0$$

En los problemas siguientes encontrar los puntos de máximo, mínimo ó ensilladura de las funciones:

21. $f(x, y) = x^2y^2(6 - x - y)$

22. $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$

23. $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 + 3$

24. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4$

25. $f(x, y) = 6x - 8y - x^2 - y^2$

26. $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$

27. $f(x, y) = 18x^2 + 32y^2 - 36x - 128y - 110$

28. $f(x, y) = x^3 - 3axy + y^3, \quad a > 0$

29. $f(x, y) = xy - \ln(x^2 + y^2)$

30. Determinar los extremos de la función $f(x, y) = x + y$ si los puntos (x, y) están sujetos a la restricción $x^2 + y^2 = 1$

31. Determinar los extremos de la función $f(x, y) = e^{xy}$ si los puntos (x, y) están sujetos a la restricción $x + y = 2$.

32. Determinar los extremos de la función $f(x, y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$ si los puntos (x, y) están sujetos a la restricción $x + y = 2$.

33. Determinar los extremos de la función $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$ si los puntos (x, y) están sujetos a la restricción $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

34. Determinar los extremos de la función $f(x, y) = 2x + 2xy + y$ si los puntos (x, y) están sujetos a la restricción $2x + y = 100$

35. Determinar los extremos de la función $f(x, y) = x + y$ si los puntos (x, y) están sujetos a la restricción $xy = 1$

36. Determinar los extremos de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ si los puntos (x, y, z) están sujetos a la restricción $3x - 2y + z - 4 = 0$

37. Determinar los extremos de la función $f(x, y, z) = xyz$ si los puntos (x, y, z) están sujetos a la restricción $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

38. Determinar los extremos de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ si los puntos (x, y, z) están sujetos a la restricción $3x + 2y - 7z = 5$.

39. Hallar el mínimo de la función $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$ si los puntos (x, y) están sujetos a la restricción $x + 2y \geq 24$

40. Hallar el máximo de la función $f(x, y) = 12xy - x^2 - 3y^2$ si los puntos (x, y) están sujetos a la restricción $x + y \leq 16$

41. Hallar el mínimo de la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$ si los puntos (x, y) están sujetos a la restricción $x + y \geq 8$.

42. Hallar los puntos de la curva $x^2 + 2xy + 2y^2 = 100$ que estén mas próximos al origen.

43. Determinar tres números positivos cuya suma sea 21, de manera que su producto sea máximo.

44. Determinar el punto del plano $x + 2y + z = 1$ más cercano al origen.

45. Encontrar todos los puntos de la superficie $xyz = 8$ que estén más cercanos al origen. Obtener la distancia mínima.

46. Encontrar los puntos de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ más próximo y más alejado del punto $(1, 2, 2)$

47. Un contenedor (en forma de sólido rectangular) atiene un volumen de 480 m^3. Hallar las dimensiones que hacen mínimo el costo de fabricación, sabiendo que el fondo cuesta $5Bs.$ el m^2, mientras que los laterales y la cubierta superior cuestan $3Bs.$ el m^2.

48. Determinar los puntos de la superficie $z = xy+5$ que sean los más cercanos al origen de coordenadas.

49. Encontrar tres números positivos x, y, z tales que $x + y + z = 1$ y además hagan que la cantidad $xy + xz + yz$ sea tan grande como sea posible.

50. Encontrar los puntos de la curva de intersección del elipsoide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$ y el llano $x - 4y - z = 0$ que sean los más cercanos al origen de coordenadas. Hallar esta distancia mínima.

51. Encontrar el máximo de xyz donde x, y, z son positivos, tal que se cumpla la ecuación $x + 3y + 4z = 108$.

52. Hallar el punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra más alejado del punto $(1, -1, 1)$.

53. Hallar la mínima distancia que existe entre la curva $y^2 = x + 2$ y el origen.

54. Encontrar la mínima distancia entre el origen de coordenadas y el plano de ecuación $3x + 6y + 2z - 28 = 0$.

55. Hallar el máximo volumen de una caja, si la suma de las longitudes de las aristas debe se igual al valor a.

56. Determinar las dimensiones del paralelepípedo con caras paralelas a los planos coordenados, de máximo volumen que está en el primer octante limitado por los planos coordenados y el plano $x + 2y + z = 6$

57. Hallar las dimensiones del paralelepípedo de área 600 cm^2 que tenga el mayor volumen posible.

58. Si la base de una caja rectangular cuesta $4\ Bs.$ por cm^2, la tapa y los lados cuestan $2Bs.$ por cm^2. Hallar las dimensiones de la caja de volumen máximo que cueste 72 $Bs.$

59. Si la tapa y base de una caja rectangular cuestan $4\ Bs.$ por cm^2,las caras laterales cuestan $2Bs.$ por cm^2. Hallar las dimensiones de la caja de costo mínimo, si su volumen debe ser de 2000 cm^3.

60. Determinar las dimensiones de un envase cilíndrico sin tapa, que debe contener un litro de líquido, de tal modo que en su fabricación se requiera la mínima cantidad de material.

61. Calcular las aristas del mayor paralelepípedo rectangular que tiene tres caras en los planos coordenados y el vértice opuesto en el plano $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

62. Determinar el paralelepípedo rectangular de máximo volumen y lados paralelos a los planos coordenados, que puede inscribirse en el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$